**DST Seconde Octobre 2019 Durée 1h30 calculatrice interdite**

**Exercice 1**

Calculer et écrire le résultat sous la forme la mieux adaptée.

- $A = -\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{5}$
- $B = \sqrt{5^2 - 3^2}$
- $C = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$
- $D = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{1-\sqrt{3}}$
- $E = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$
- $F = \sqrt{12} - 3\sqrt{108} + \sqrt{75}$
- $G = \left(\sqrt{5}+1\right)^2 + \left(\sqrt{5}-1\right)^2$
- $H = \frac{49 \times 10^7 \times 6 \times (10^5)^2}{3 \times 10^4 \times 7 \times 10^{-12}}$

**Corrigé**

- $A = -\frac{2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{5}$

$A = \frac{-2}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1 \times 4}{6 \times 5}$

$A = \frac{-2 \times 10}{3 \times 10} - \frac{1 \times 5}{6 \times 5} + \frac{4}{30}$

$A = \frac{-20}{30} - \frac{5}{30} + \frac{4}{30}$

$A = \frac{-20 - 5 + 4}{30}$

$A = \frac{-21}{30}$

$A = -\frac{3 \times 7}{3 \times 10}$

$A = -\frac{7}{10}$

**Bilan**

*Lorsque le calcul avec des fractions commence par un «—» : le faire porter sur le* ***numérateur*** *le la* ***première fraction****.*

- $B = \sqrt{5^2 - 3^2}$

$B = \sqrt{25 - 9}$

$B = \sqrt{16}$

$B = 4$

**Bilan**

*La racine carrée d'une somme/différence* ***n'est pas*** *égale à la somme/différence des racines carrées :* $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ *et* $\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

- $C = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

$C = \frac{1 \times \left(1-\sqrt{2}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right) \times \left(1-\sqrt{2}\right)}$

$C = \frac{1-\sqrt{2}}{(1)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$

$C = \frac{1-\sqrt{2}}{1-2}$

$C = \frac{1-\sqrt{2}}{-1}$

$C = -\frac{1-\sqrt{2}}{1}$

$C = -\left(1-\sqrt{2}\right)$

$C = -1 + \sqrt{2}$

**Bilan**

*Lorsque le dénominateur est une somme/différence avec racine carrée, on multiplie par l'expression conjuguée : différence/somme.*

*On a utilisé l'égalité remarquable :* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$\bullet\ D = \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{1-\sqrt{3}}$

$D = \frac{1 \times (1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3}) \times (1-\sqrt{3})} + \frac{1 \times (1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3}) \times (1+\sqrt{3})}$

$D = \frac{1-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} + \frac{1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}$

$D = \frac{(1-\sqrt{3}) + (1+\sqrt{3})}{(1)^2 - (\sqrt{3})^2}$

$D = \frac{1-\sqrt{3}+1+\sqrt{3}}{1-3}$

$D = \frac{2}{-2}$

$D = -1$

$\bullet\ E = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$

$E = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{2}+\frac{1}{2}}}$

$E = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{3}{2}}}$

$E = 1 + \frac{1}{1+\frac{2}{3}}$

$E = 1 + \frac{1}{\frac{3}{3}+\frac{2}{3}}$

$E = 1 + \frac{1}{\frac{5}{3}}$

$E = 1 + \frac{3}{5}$

$E = \frac{5}{5} + \frac{3}{5}$

$E = \frac{8}{5}$

$\bullet\ F = \sqrt{12} - 3\sqrt{108} + \sqrt{75}$

$F = \sqrt{4 \times 3} - 3\sqrt{36 \times 3} + \sqrt{25 \times 3}$

$F = \sqrt{4} \times \sqrt{3} - 3 \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} + \sqrt{25} \times \sqrt{3}$

$F = 2 \times \sqrt{3} - 3 \times 6 \times \sqrt{3} + 5 \times \sqrt{3}$

$F = (2 - 18 + 5)\sqrt{3}$

$F = -11\sqrt{3}$

$\bullet\ G = (\sqrt{5}+1)^2 + (\sqrt{5}-1)^2$

$G = (\sqrt{5})^2 + 2(\sqrt{5})(1) + (1)^2 + (\sqrt{5})^2 - 2(\sqrt{5})(1) + (1)^2$

$G = 5 + 2\sqrt{5} + 1 + 5 - 2\sqrt{5} + 1$

$G = 12$

$\bullet\ H = \frac{49 \times 10^7 \times 6 \times (10^5)^2}{3 \times 10^4 \times 7 \times 10^{-12}}$

$H = \frac{49 \times 6}{3 \times 7} \times \frac{10^7 \times 10^{5\times 2}}{10^4 \times 10^{-12}}$

$H = \frac{7 \times 7 \times 2 \times 3}{3 \times 7 \times 1} \times 10^{7+10-4+12}$

$H = 14 \times 10^{25}$

$H = 1{,}4 \times 10 \times 10^{25}$

$H = 1{,}4 \times 10^1 \times 10^{25}$

$H = 1{,}4 \times 10^{1+25}$

$H = 1{,}4 \times 10^{26}$

**Exercice 2**

Compléter sans justification toutes les cases de la grille suivante avec les symboles ∈ ou ∉ ; en déduire la nature du nombre proposé :

| | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{6}$ | | | | | |
| $-7$ | | | | | |
| $1{,}02$ | | | | | |
| $\sqrt{3}$ | | | | | |
| $\frac{68}{17}$ | | | | | |
| $10^{-5}$ | | | | | |
| $\frac{\sqrt{196}}{7}$ | | | | | |
| $3{,}14$ | | | | | |

**Corrigé**

| | $\mathbb{N}$ | $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{Q}$ | $\mathbb{R}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{1}{6}$ | ∉ | ∉ | ∉ | ∈ | ∈ |
| $-7$ | ∉ | ∈ | ∈ | ∈ | ∈ |
| $1{,}02$ | ∉ | ∉ | ∈ | ∈ | ∈ |
| $\sqrt{3}$ | ∉ | ∉ | ∉ | ∉ | ∈ |
| $\frac{68}{17}$ | ∈ | ∈ | ∈ | ∈ | ∈ |
| $10^{-5}$ | ∉ | ∉ | ∈ | ∈ | ∈ |
| $\frac{\sqrt{196}}{7}$ | ∈ | ∈ | ∈ | ∈ | ∈ |
| $3{,}14$ | ∉ | ∉ | ∈ | ∈ | ∈ |

- $\frac{1}{6} \notin \mathbb{D}$ et $\frac{1}{6} \in \mathbb{Q}$ donc la nature de $\frac{1}{6}$ est : nombre rationnel.
- $(-7) \notin \mathbb{N}$ et $(-7) \in \mathbb{Z}$ donc la nature de $(-7)$ est : entier relatif.
- $1{,}02 \notin \mathbb{Z}$ et $1{,}02 \in \mathbb{D}$ donc la nature de $1{,}02$ est : nombre décimal.
- $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ donc la nature de $\sqrt{3}$ est : nombre irrationnel.
- $\frac{68}{17} = \frac{17\times4}{17\times1} = 4$ et comme $4 \in \mathbb{N}$, la nature de $\frac{68}{17}$ est : entier naturel.
- $10^{-5} = 0{,}000\,01$

$0{,}000\,01 \notin \mathbb{Z}$ et $0{,}000\,01 \in \mathbb{D}$ donc la nature de $10^{-5}$ est : nombre décimal.

- $\frac{\sqrt{196}}{7} = \frac{14}{7} = 2$ et comme $2 \in \mathbb{N}$, la nature de $\frac{\sqrt{196}}{7}$ est : entier naturel.
- $3{,}14 \notin \mathbb{Z}$ et $3{,}14 \in \mathbb{D}$ donc la nature de $3{,}14$ est : nombre décimal.

**Exercice 3**

Pour chacune des trois affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant par une démonstration ou un contre-exemple.

**Affirmation n°1**

Le produit de deux nombres irrationnels est toujours un nombre irrationnel.

**Affirmation n°2**

$$\frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}}{2} + 1$$

**Affirmation n°3**

Soit $ABC$ est un triangle tel que : $AB = 2\sqrt{11}$, $AC = \sqrt{154}$, $BC = 3\sqrt{22}$.

Le triangle $ABC$ est rectangle.

**Corrigé**

**Affirmation n°1**

*« Le produit de deux nombres irrationnels est toujours un nombre irrationnel. »*

Contre-exemple : $\sqrt{2}$ est irrationnel et $\sqrt{2}\times\sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ et comme 2 est un entier naturel c'est aussi un nombre rationnel.

Le produit des deux nombres irrationnels $\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, donc l'affirmation est **fausse**.

**Affirmation n°2**

$$\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}}{2}+1$$

On a :

$$\frac{1}{\sqrt{6}-2}$$
$$=\frac{1\times(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)\times(\sqrt{6}+2)}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+2}{\left(\sqrt{6}\right)^2-(2)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+2}{6-4}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+2}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{2}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{2}+1$$

On a donc bien :

$$\frac{1}{\sqrt{6}-2}=\frac{\sqrt{6}}{2}+1$$

donc l'affirmation est **vraie**.

**Affirmation n°3**

*« sachant que $AB=2\sqrt{11}$, $AC=\sqrt{154}$, $BC=3\sqrt{22}$, le triangle $ABC$ est rectangle »*

Remarquons d'abord que :

$$AB=2\sqrt{11}=\sqrt{4}\times\sqrt{11}=\sqrt{4\times 11}=\sqrt{44}$$
$$AC=\sqrt{154}$$
$$BC=3\sqrt{22}=\sqrt{9}\times\sqrt{22}=\sqrt{9\times 22}=\sqrt{198}$$

Comme $\sqrt{198}>\sqrt{154}>\sqrt{44}$ le grand côté du triangle $ABC$ est $[BC]$ donc si le triangle $ABC$ est rectangle ce sera en $A$.

Calculons séparément :

$$BC^2=\left(\sqrt{198}\right)^2=198$$
$$BA^2+AC^2=\left(\sqrt{44}\right)^2+\left(\sqrt{154}\right)^2=44+154=198$$

On constate que $BC^2=BA^2+AC^2$ donc d'après la **réciproque** du théorème de Pythagore, on en déduit que le triangle $ABC$est rectangle en $A$.

Bilan

*Il est **interdit** d'employer le mot hypoténuse avant d'avoir terminé de démontrer que le triangle est rectangle.*
*Pour démontrer que le triangle est rectangle, **on constate** une égalité avec des carrés de distances, **on utilise** la réciproque du théorème de Pythagore (et non le théorème ou la contraposée du théorème), on **en déduit** que le triangle est rectangle, et on précise le sommet de l'angle droit.*

**Exercice 5**

Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels.

1. Montrer que : si $n$ et $p$ sont pairs, alors $n\times p$ est pair.
2. Montrer que : si $n$ et $p$ sont impairs, alors $n\times p$ est impair.
3. Montrer que : si $n$ est pair et $p$ impair, alors $n\times p$ est pair.
4. Déduire des études précédentes une règle simple donnant la parité du produit de deux entiers naturels.

**Corrigé**

1. **Montrons que si $n$ et $p$ sont pairs, alors $n\times p$ est pair.**
   Soient :
   $n$ un entier naturel pair : il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $n=2k$,
   $p$ un entier naturel pair : il existe $k'\in\mathbb{N}$ tel que $p=2k'$.
   On en déduit : $n\times p=2k\times 2k'=4kk'=2\times 2kk'$.
   Comme $2kk'\in\mathbb{N}$, on en déduit que $n\times p$ est pair.

*Bilan*

*Attention, on ne peut pas parler d'un seul entier $k$ dans les écritures de $n$ et $p$, mais de deux entier $k$ et $k'$ qui seront presque toujours différents.*
*Vous ne devez pas rappeler le cours (donc rappeler la définition d'un entier pair, mais **utiliser** la définition d'un entier naturel pair).*

2. **Montrons que si $n$ et $p$ sont impairs, alors $n \times p$ est impair.**
   Soient :
   $n$ un entier naturel pair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$,
   $p$ un entier naturel impair : il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k' + 1$.
   On en déduit que :
   $$n \times p = (2k + 1) \times (2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1$$
   $$= 2(2kk' + k + k') + 1$$
   Comme $2kk' + k + k' \in \mathbb{N}$, on en déduit que $n \times p$ est impair.

3. **Montrons que si $n$ est pair et $p$ est impair, alors $n \times p$ est impair.**
   Soient :
   $n$ un entier naturel pair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$,
   $p$ un entier naturel impair : il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k' + 1$.
   On en déduit :
   $$n \times p = 2k \times (2k' + 1)$$
   $$= 4kk' + 2k$$
   $$= 2(2kk' + k)$$
   Comme $2kk' + k \in \mathbb{N}$, on en dédui que $n \times p$ est pair.

4. **Synthèse**
   Le produit de deux entiers naturels est impair si et seulement les deux entiers naturels sont impairs.
   Autre formulation possible :
   le produit de deux entiers naturels est pair si et seulement si au moins un des deux entiers est pair.

**<u>Exercice 6</u>**

1. $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$
   $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$
   $6^2 - 5^2 = 36 - 25 = 11$

2. On constate que :
   $$4^2 - 3^2 = 4 + 3$$
   $$5^2 - 4^2 = 5 + 4$$
   $$6^2 - 5^2 = 6 + 5$$
   On peut raisonnablement penser que la différence des carrés de deux nombres entiers consécutifs est égal à la somme de ces deux nombres.

3. Considérons deux entiers consécutifs : en notant $n$ le plus petit d'entre eux, le plus grand est égal à $n + 1$.
   La différence de leurs carrés est :
   $$(n + 1)^2 - n^2$$
   $$= n^2 + 2n + 1 - n^2$$
   $$= 2n + 1$$
   $$= (n + 1) + n$$
   La différence des carrés est bien égale à la somme des deux nombres de départ.

   *Autre solution*
   *On peut raisonnablement penser que différence de leurs carrés est un nombre impair (7 est impair, 9 est impair, 11 est impair), ce que montre ensuite l'égalité :* $(n + 1)^2 - n^2 = \cdots = 2n + 1$.